

6.4. Метод функцій Ляпунова

Лема 1. Нехай $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна в нулі функція, а φ – функція з \mathbb{R}_+ в \mathbb{R}_+ така, що $\varphi(r) > 0$ при $r > 0$. Тоді існує функція $q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ така, що для будь-якого $r > 0$

$$\sup_{|x| < q(r)} |v(x) - v(0)| < \varphi(r).$$

◀ Із припущення про v маємо за означенням неперервності:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \sup_{|x| < \delta(\varepsilon)} |v(x) - v(0)| < \varepsilon.$$

Залишається покласти $q(r) = \delta(\varphi(r))$. ▶

Наслідок 1. Нехай $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна в нулі функція така, що

$$v(0) = 0 \tag{1}$$

і

$$v(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0. \tag{2}$$

Тоді існує функція $q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ така, що для будь-якого $r > 0$

$$\sup_{|x| < q(r)} v(x) < \inf_{|x|=r} v(x). \tag{3}$$

◀ Позначимо $\varphi(r) = \inf_{|x|=r} v(x)$. Із неперервності v випливає за теоремою

Ваєрштраса існування такого $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, що $|\bar{x}| = r$ і $\varphi(r) = v(\bar{x})$. Тоді зважаючи на (2) $\varphi(r) > 0$ при $r > 0$. Тепер існування функції q з властивістю (3) випливає з леми 1 і умови (1). ▶

Лема 2. Нехай $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна функція з властивостями (1) і (2), T і φ – додатні числа, а u – неперервна \mathbb{R}^n -значна функція на $[0, T[$ така, що: 1) функція $v(u(\cdot))$ спадає; 2) $|u(0)| < q(\varepsilon)$, де q – існуюча за наслідком 1 функція така, що при всіх $r > 0$ справджується нерівність (3). Тоді для будь-якого $t \in [0, T[$ $|u(t)| < \varepsilon$.

◀ Якщо висновок леми неправильний, то з огляду на неперервність u знайдеться $t \in [0, T[$ таке, що $|u(t)| = \varepsilon$. Тоді

$$\varphi(\varepsilon) \equiv \inf_{|x|=\varepsilon} v(x) \leq v(u(t)).$$

При цьому за першим припущенням леми $v(u(t)) \leq v(u(0))$, а за другим припущенням і вибором функції q $v(u(0)) < \varphi(\varepsilon)$. Остання нерівність суперечить попереднім двом. ►

Розглядаємо рівняння

$$\dot{x} = f(x), \quad (4)$$

у якому f – неперервна функція з \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n .

Теорема 1. (Ляпунов). *Нехай $f(0) = 0$ (так що рівняння (4) має тривіальний розв’язок). Припустимо, що існує неперервно диференційовна функція $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ з властивостями (1), (2) і така, що при всіх x*

$$v'(x)f(x) \leq 0. \quad (5)$$

Тоді тривіальний розв’язок рівняння (4) стійкий.

◀ Для будь-якої \mathbb{R}^n -значної диференційовної функції $x(\cdot)$

$$\frac{d}{dt}v(x(t)) = v'(x(t))\dot{x}(t).$$

Звідси і з умови (5) маємо для будь-якого розв’язку $x(\cdot)$ рівняння (1) (за теоремою 1.2.3 він існує принаймні на деякому сегменті $[0, h]$, $h > 0$)

$$\frac{d}{dt}v(x(t)) \leq 0,$$

тобто функція $v(x(\cdot))$ спадає в області існування розв’язку. Відтак за лемою 2, застосованою до $u = x(\cdot, \xi)$, нерівність $|x(t, \xi)| < \varepsilon$ справджується при всіх $\varepsilon > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ таких, що $|\xi| < q(\varepsilon)$, і t таких, що розв’язок існує на деякому проміжку $[0, T[$, $T > t$. Звідси за наслідком 1.2.1 випливає існування розв’язку на \mathbb{R}_+ . Отже,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t, \xi)| \leq \varepsilon \quad (6)$$

при $|\xi| < q(\varepsilon)$. А це з огляду на довільність ε і означає стійкість тривіального розв’язку $x(\cdot, 0)$. ►

Лема 3. Нехай $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна функція така, що $g(x) > 0$ при $x \neq 0$. Тоді для будь-яких $r_2 > r_1 > 0$

$$\inf_{r_1 \leq |x| \leq r_2} g(x) > 0.$$

◀ За теоремою Ваєрштраса існує точка $\bar{x} \in \{x : r_1 \leq |x| \leq r_2\}$ така, що $\inf_{r_1 \leq |x| \leq r_2} g(x) = g(\bar{x})$. За вибором \bar{x} і припущенням про g $g(\bar{x}) > 0$. ▶

Наслідок 2. Нехай функція g задовольняє умови лема 3. Тоді для будь-якої обмеженої послідовності (x_k) в \mathbb{R}^n співвідношення $g(x_k) \rightarrow 0$ зумовлює $x_k \rightarrow 0$.

Теорема 2. (Ляпунов). Нехай виконано умови теореми 1 і, крім того,

$$v'(x)f(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0. \quad (7)$$

Тоді тривіальний розв'язок рівняння (4) асимптотично стійкий.

◀ За теоремою 1 тривіальний розв'язок стійкий. Зафіксуємо ε і початкове значення ξ таке, що $|\xi| < q(\varepsilon)$ (так що справджується нерівність (6)), і позначимо $x(t) = x(t, \xi)$, $w(t) = v(x(t))$. Додатково до того, що стверджує теорема 1, потрібно тільки встановити співвідношення $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Щоб вивести його з (5) – (7), достатньо, згідно з наслідком 2, показати, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0. \quad (8)$$

За побудовою функція w невід'ємна (бо v така) і $\dot{w}(t) = v'(x(t))\dot{x}(t)$, звідки з урахуванням (4) маємо

$$\dot{w}(t) = v'(x)f(x)|_{x=x(t)}. \quad (9)$$

Це разом із (5) показує, що w спадає.

Розглянемо два випадки, вичерпуючі всі можливості.

1. Для будь-якого $r > 0$ існує $t(r) \in \mathbb{R}_+$ таке, що $|x(t(r))| \leq r$. Тоді, взявши спадну до нуля послідовність (r_k) і позначивши $\tau_k = t(r_k)$, дістанемо $w(\tau_k) \equiv (x(\tau_k)) \rightarrow v(0) \stackrel{(1)}{=} 0$, що з огляду на встановлені вище властивості w зумовлює (8).

2. Існують $r > 0$ і $T > 0$ такі, що при всіх $t > T$

$$|x(t)| > r \quad (10)$$

(відтак з огляду на (6) $r < \varepsilon$). Тоді, позначивши

$$b = \inf_{r \leq |x| \leq \varepsilon} (-v'(x)f(x)),$$

одержимо з (9), (6) і (10)

$$-\dot{w}(t) \geq b \quad \text{при} \quad t \geq T.$$

Звідси, записавши формулу Ньютона – Ляйбніца

$$w(T_1) = w(T) + \int_T^{T_1} \dot{w}(t) dt,$$

дістанемо при $T_1 > t$

$$w(T_1) \leq w(T) - b \int_T^{T_1} dt \equiv w(T) - b(T_1 - T). \quad (11)$$

Із (5) і (7) виводимо за лемою 3 ($g = -v'f$), що $b > 0$. Тому при $T_1 > b^{-1}w(T) + T$ права частина (11) від'ємна, що суперечить невід'ємності w . Таким чином, другий випадок неможливий. ►

Функція v з теорем 1 і 2 називається *функцією Ляпунова*. Універсального способу побудови її не існує. Іноді вдається підібрати v у вигляді многочлена.

Приклад 1.
$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - y, \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$$

Позначенню x теорем Ляпунова тепер відповідає $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Функція $v(x, y) = x^2 + y^2$ задовольняє умови теореми 2. Справді, вона додатна скрізь, крім початку координат, у якому вона дорівнює нулю, і

$$v'(x, y)f(x, y) = (2x \quad 2y) \begin{pmatrix} -x^3 - y \\ x - y^3 \end{pmatrix} = -2(x^4 + y^4) \leq 0,$$

причому рівність досягається тільки в початку координат. Тоді теорема 2 стверджує асимптотичну стійкість тривіального розв'язку.